Beaus p 124   charles nbehhhh / Lauffelac p 119   Espace de Bergman du Disque.

Théorème : L'espace $H := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert dont une base hilbertienne est donnée par $\{e_n : z \mapsto z^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Preuve : Montrons une inégalité : Soit $r > 0$. Soit $f \in H$. Soit $z \in \mathbb{D}$. On suppose $\overline{B} = \overline{B(z,r)} \subset \mathbb{D}$

On développe f en série entière autour de z (car f analytique)

Donc $\forall w \in \overline{B}$, $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w - z)^n$ série normalement cvg car $\overline{B}$ est compact.

Ainsi, $\int_{\overline{B}} f(w)\,dw = \int_{\overline{B}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w-z)^n\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_{\overline{B}} (w-z)^n\,dw$ par CVN de la série

D'où $\int_{\overline{B}} f(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} e^{in\theta}\,d\rho\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \int_0^r \rho^{n+1}\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,d\theta}_{=0 \text{ sauf si } n=0}$

$= \frac{2\pi r^2}{2} \times f(z) = \pi r^2 f(z)$.

Ainsi, par Cauchy-Schwarz on a : $\forall z \in \mathbb{D}$ tq $\overline{B} \subset \mathbb{D}$:

$$|f(z)| = \frac{1}{\pi r^2}\left|\int_{\overline{B}} f(w)\,dw\right| \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{B}} |f(w)|\,dw \leq \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{\overline{B}} |f(w)|^2\,dw\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\overline{B}} dw\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\|f\|_2.$$

& Montrons que H est un espace de Hilbert : Comme H est préhilbertien, montrons qu'il est complet pour $\|\cdot\|_2$. Soit (f_n) une suite de Cauchy de H pour $\|\cdot\|_2$. Soit $K \subset \mathbb{D}$ un compact.

Donc $\exists r > 0$, $K \subset \overline{B(0,r)} \subset \mathbb{D}$. Donc $\forall z \in K$ $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$ $|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2$

Ainsi, (f_n) vérifie le critère de Cauchy Uniforme (pour $\|\cdot\|_\infty$) sur tout compact. Donc (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{D}$. Donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$

De plus (f_n) est une suite de Cauchy sur $L^2(\mathbb{D})$, complet d'après Fischer-Riesz, donc $\exists g \in L^2(\mathbb{D})$ tq (f_n) converge vers g en $\|\cdot\|_2$. Or Fischer-Riesz donne aussi $(f_{\varphi(n)})$ converge vers g presque partout. Donc $f = g$ p.p et $f \in H$ donc H est complet.

Montrons que (e_n) est une base Hilbertienne :

* (e_n) est orthonormée :

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^*$. On a $\int_{\mathbb{D}} z^p \bar{z}^q dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{p+q+1} e^{i(p-q)\theta} dr d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2\pi}} r^{p+q+1} \delta_{p,q} dr$

Donc si $p \neq q$ $\langle e_p, e_q \rangle = 0$

si $p = q$ $\langle e_p, e_p \rangle = \frac{p+1}{\pi} \times 2\pi \int_0^1 r^{2p+1} dr = 1.$

Donc (e_n) est orthonormée.

* Montrons que la famille est totale :

Soit $f \in H$ et $f \in \mathrm{Vect}(e_n)^{\perp}$

$\forall z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ car f analytique (car $f \in H$) et $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ $\forall r \in [0,1[$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle f, e_n \rangle = 0 = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^n \left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) r dr$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^{n+1} (2\pi r^n a_n) dr$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$ et $f = 0$ donc (e_n) est totale.

Donc (e_n) est une base hilbertienne de H.